第１４講・比例と反比例③ グラフの応用問題

要点整理

1　座標が x 座標，y 座標ともに整数であることを問われる問題は「反比例の問題」が多い。

2　グラフ上の点の x 座標を t とおき，y 座標を t で表す。

例題 1

次の問いに答えなさい。

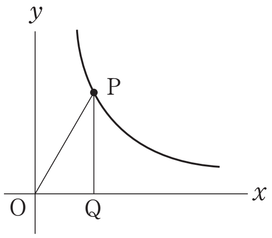
(1)　y は x に反比例する。そのグラフが $(-2,\ -3)$，$(4,\ a)$ を通るとき，a の値を求めよ。

(2)　$y=\dfrac{16}{x}$ のグラフ上の点で，x 座標，y 座標の値がともに整数となる点はいくつあるか。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

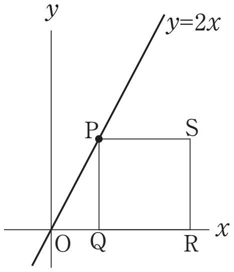
例題 2

右の図は，$x>0$ のときの関数 $y=\frac{18}{x}$ のグラフである。このグラフ上の点Pから x 軸に垂線PQをひき，△OPQをつくるとき，点Pをグラフ上のどこにとっても△OPQの面積は一定であることを説明しなさい。



例題 3

右の図のように，点Pは直線 $y=2x$ 上にあり，この直線上を $x>0$ の範囲で動く。Pから x 軸に垂線PQをひき，PQを1辺とする正方形PQRSを，PQの右側につくる。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Pの座標が(2，4)のとき，点Sの座標を求めよ。

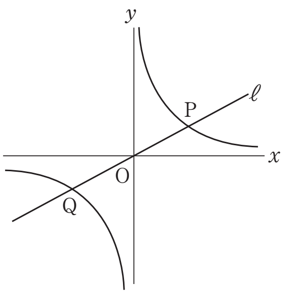
(2)　Sの x 座標が16のとき，点Pの x 座標を求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問題

14－1

右の図で，2点P，Qは$y=\frac{32}{x}$のグラフと原点を通る直線ℓとの交点である。このとき，次の問いに答えなさい。

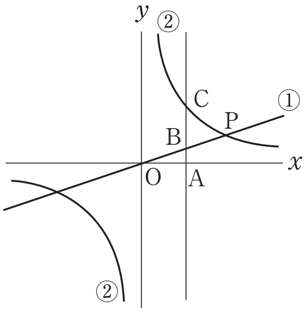


(1)　$y=\frac{32}{x}$のグラフ上の点で，x座標，y座標がともに整数になる点はいくつあるか。

(2)　2点P，Qのx座標，y座標がともに整数で，かつ直線ℓの比例定数が整数となる場合は何通りあるか。

14－2

右の図のように，比例のグラフ①と反比例のグラフ②がPで交わっている。点Pの座標は(6，2)である。また，x軸上の点A(a，0)を通りx軸に垂直な直線が，①，②と交わる点をそれぞれB，Cとする。次の問いに答えなさい。ただし，$a>0$とする。



(1)　グラフ①，②の式をそれぞれ求めよ。

(2)　△OABの面積が△OACの面積の$\frac{1}{4}$になるようなaの値を求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< *Note* >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

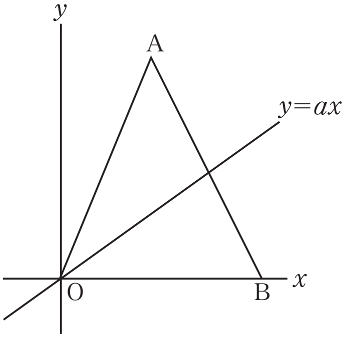
第14講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

(1)　$y=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x$ のグラフは2点(10，12)，(－ ウエ ，－24)を通る。

(2)　$y=\frac{12}{x}$ のグラフ上の点で，x 座標，y 座標の値がともに整数となる点は オカ 個ある。

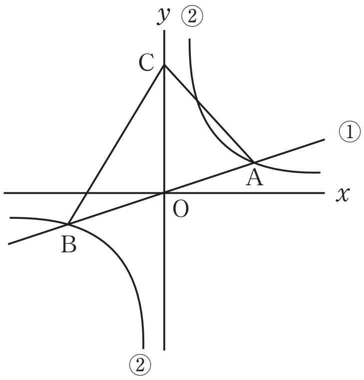
［2］　右の図で，点Aの座標は(5，12)，点Bの座標は(11，0)です。直線 $y=ax$ が三角形OABの面積を2等分するとき，a の値は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ です。



［3］　右の図で，①は $y=ax$ のグラフ，②は $y=\frac{b}{x}$ のグラフで，2点A，Bは①と②の交点で点Aの座標は(6，2)である。また，点Cは y 軸上の点で，座標は(0，8)である。

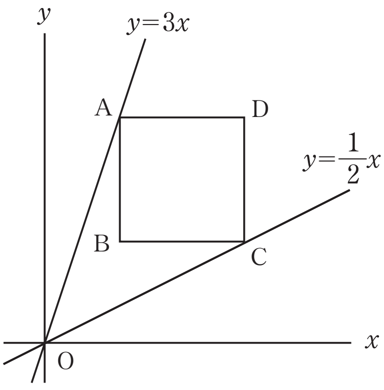
(1)　a の値は $\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$，$b$ の値は サシ です。

(2)　三角形ABCの面積は スセ です。



［4］　右の図で，点Aは $y=3x$ のグラフ上の点で，点Cは $y=\frac{1}{2}x$ のグラフ上の点である。四角形ABCDは正方形で，ABは y 軸に平行である。

(1)　正方形ABCDの面積が16であるとき，点Aの x 座標は $\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ です。



(2)　点Aの x 座標が4のとき，正方形ABCDの面積は $\frac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナ}}$ です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ *Note* ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講・比例と反比例③ グラフの応用問題

例題 1

(1)　$a=\frac{3}{2}$　　(2)　10個

解説

(2)　$xy=16$ より，かけて16になる2整数を考える。

$(x,\ y)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1),\ (-1,\ -16),$
$(-2,\ -8),\ (-4,\ -4),\ (-8,\ -2),\ (-16,\ -1)$

例題 2

（$\frac{18}{t}$：$y=\frac{18}{x}$ に $x=t$ を代入する。）

点Pの x 座標を t とすると，y 座標は $\frac{18}{t}$ と表せるから，$OQ=t$，$PQ=\frac{18}{t}$ より，

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}t\times\frac{18}{t}=9$　　したがって，点Pをどこにとっても△OPQの面積は一定の値9になる。

例題 3

(1)　(6,　4)　　(2)　$\frac{16}{3}$

解説

(1)　$PQ=4$ より，$PS=4$

(2)　$P(t,\ 2t)$ とおくと，$PS=PQ=2t$ より，$S(3t,\ 2t)$　　$3t=16$ より，$t=\frac{16}{3}$

14−1

(1)　12個　　(2)　3通り

解説

(1)　32の約数を考える。ただし，負の値にも注意する。

(2)　(1)で求めた点の x，y の値を，それぞれ $y=ax$ に代入して考える。

14−2

(1)①　$y=\frac{1}{3}x$　②　$y=\frac{12}{x}$　　(2)　$a=3$

解説

(2)　$A(a,\ 0)$ より，$B\left(a,\ \frac{1}{3}a\right)$，$C\left(a,\ \frac{12}{a}\right)$ と表せる。

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{3}a=\frac{1}{6}a^2$，$\triangle OAC=\frac{1}{2}\times a\times\frac{12}{a}=6$ より，$\frac{1}{6}a^2=6\times\frac{1}{4}$

これを解いて，$a>0$ だから，$a=3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

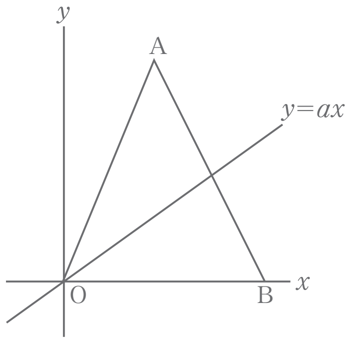
第14講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

（1）　$y=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}x$ のグラフは2点(10，12)，(−$\boxed{ウエ}$，−24)を通る。

（2）　$y=\dfrac{12}{x}$ のグラフ上の点で，x 座標，y 座標の値がともに整数となる点は $\boxed{オカ}$ 個ある。

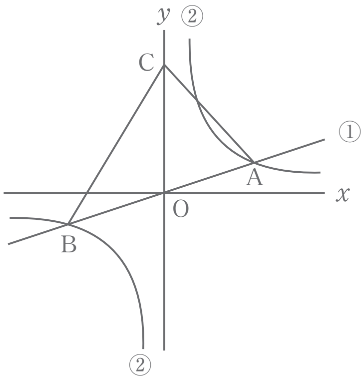
［2］　右の図で，点Aの座標は(5，12)，点Bの座標は(11，0)です。直線 $y=ax$ が三角形OABの面積を2等分するとき，a の値は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ です。



［3］　右の図で，①は $y=ax$ のグラフ，②は $y=\dfrac{b}{x}$ のグラフで，2点A，Bは①と②の交点で点Aの座標は(6，2)である。また，点Cは y 軸上の点で，座標は(0，8)である。

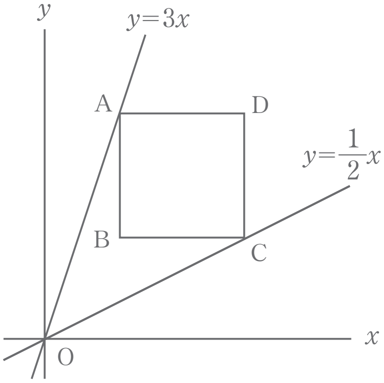
（1）　a の値は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$，$b$ の値は $\boxed{サシ}$ です。

（2）　三角形ABCの面積は $\boxed{スセ}$ です。



［4］　右の図で，点Aは $y=3x$ のグラフ上の点で，点Cは $y=\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上の点である。四角形ABCDは正方形で，ABは y 軸に平行である。

（1）　正方形ABCDの面積が16であるとき，点Aの x 座標は $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ です。



（2）　点Aの x 座標が4のとき，正方形ABCDの面積は $\dfrac{\boxed{ツテト}}{\boxed{ナ}}$ です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

解答

［1］　ア　6　　イ　5　　ウ　2　　エ　0　　オ　1　　カ　2

［2］　キ　3　　ク　4

［3］　ケ　1　　コ　3　　サ　1　　シ　2　　ス　4　　セ　8

［4］　ソ　1　　タ　2　　チ　5　　ツ　4　　テ　0　　ト　0　　ナ　9

解説

［1］　⑵　$xy=12$ より，かけて 12 になる 2 つの整数を考える。

$(x,\ y)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2),\ (12,\ 1),\ (-1,\ -12),$
$(-2,\ -6),\ (-3,\ -4),\ (-4,\ -3),\ (-6,\ -2),\ (-12,\ -1)$

［2］　直線 $y=ax$ は AB の中点を通る。この点を C とすると，$C\left(\frac{5+11}{2},\ \frac{12+0}{2}\right)=(8,\ 6)$

$y=ax$ に $x=8$，$y=6$ を代入して，$6=8a$ より，$a=\frac{3}{4}$

［3］　⑵　（三角形 ABC の面積）＝（三角形 OAC の面積）＋（三角形 OBC の面積）

点 B の x 座標は -6 だから，三角形 ABC の面積は，

$\frac{1}{2}\times8\times6+\frac{1}{2}\times8\times6=48$

［4］　⑴　点 A の x 座標を t とすると，$A(t,\ 3t)$

正方形の 1 辺の長さは 4 だから，$B(t,\ 3t-4)$，$C(t+4,\ 3t-4)$

$y=\frac{1}{2}x$ に $x=t+4$，$y=3t-4$ を代入すると，$3t-4=\frac{1}{2}(t+4)$

よって，$t=\frac{12}{5}$

⑵　正方形 ABCD の 1 辺の長さを ℓ とする。

点 A の y 座標は 12 だから，$B(4,\ 12-\ell)$，$C(4+\ell,\ 12-\ell)$

$y=\frac{1}{2}x$ に $x=4+\ell$，$y=12-\ell$ を代入すると，$12-\ell=\frac{1}{2}(4+\ell)$

よって，$\ell=\frac{20}{3}$ だから，正方形 ABCD の面積は，$\frac{20}{3}\times\frac{20}{3}=\frac{400}{9}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。